

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазина Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

9-дәріс. Үш дене есебі

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға үш дененің шектеулі есебі, оның түрлері мен маңызын түсіндіру; шектеулі шеңберлік және жазықты шектеулі шеңберлік үш дене есебінің ерекшеліктерін, негізгі теңдеулерін және қолдану аймақтарын меңгерту; үш дене жүйесіндегі қозғалыстың тұрақтылығын талдауға және либрация нүктелерінің табиғатын түсіндіруге үйрету.

Жоспар

1. Үш дененің шектеулі есебі
2. Үш дененің шектеулі шеңберлік есебі
3. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебі

1. Үш дененің шектеулі есебі

Нақты аспан денелер жүйесінің қозғалыс моделін алу үшін үш дене есебі қарастырылады. Бұл есеп –өзара тартылыс күштер өрісіндегі үш материалдық нүктенің қозғалысын сипаттайды. Бұл үштік жұлдыздық жүйелер: «Жер-Ай-Күн», «Күн-планета-комета», «Жер-Ай-ЖЖС» және тағы басқалар.

Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебінің теңдеулерін көп дене есебінің дербес жағдайы ($n = 2$) ретінде қарастыруға болады (1 сурет):

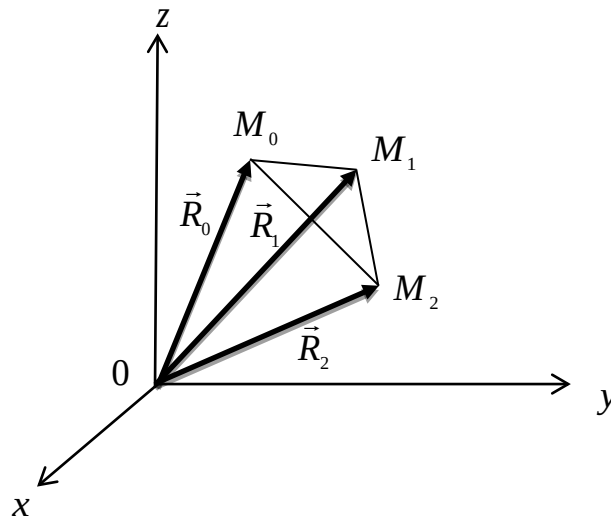
$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_0 &= Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}\end{aligned}\quad (1)$$

Бұл 18-ші дәрежелі жүйе. Осы жүйені арнайы жуықтау әдісі арқылы интегралдауға болады. Бірақ үш дене есебінде өте маңызды және жүйені оңайлататын жағдай ерекше қарастырылады. Осы жағдайда бір материалдық нүктенің массасы басқаларға қарағанда көп кіші болады.

$m \equiv m_0 \lll m_1, m_2$ жағдай – *үш дененің шектеулі есебі* деп аталады. Алғашқы рет осы есепті кометалардың алып-планеталардың маңында қозғалысын зерттеу кезінде П. Лаплас қарастырды.

Материалдық нүктелердің біреуі - ғарыштық аппарат болған кезінде, үш дененің қозғалысы осы есеп бойынша анықталады. Кіші массасы бар материалдық нүкте басқа екі дененің («ауыр нүктелер») гравитациялық өрістерінде қозғалады және солардың қозғалыстарына ешқандай әсер етпейді, бұл осы есептің негізгі физикалық мағынасы. Сонда басқа екі дененің қозғалысы белгілі кеплер қозғалысы болады. Осыған сәйкес үш

дененің шектеулі есебі шеңберлік, эллипстік және тағы басқа түрлерінде болады.



1 сурет – Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебі

2. Үш дененің шектеулі шеңберлік есебі

m_1, m_2 массасы бар екі ауыр нүктелер M_1, M_2 бір-бірінен a - тұрақты арақашықтықта орналасқан және бір дене екіншісін немесе олардың масса центрін айналып, тұрақты бұрыштық жылдамдығымен

$$n = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^{3/2}} \quad (2)$$

қозғалады.

(1) үш дене есебінің соңғы екі теңдеуінде оң жағындағы бірінші қосындылары болмайды және осы теңдеулер белгілі шешімі бар екі дене есебінің теңдеулер жүйесін құрастырады. Бірінші теңдеу m - кіші массасы бар нүктенің қозғалыс теңдеуі

$$\ddot{\vec{R}} = Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}}{\rho_2^3}, \quad (3)$$

осында $\rho_{1,2}$ - M нүктенің $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтық. Бұл есепте n бұрыштық жылдамдығымен масса центрін айналатын барицентрлік координат жүйесін қолдану тиімді, сонда үш дененің шектеулі есебі екі жылжымайтын центр есебіне ұқсас болады. Бірақ бұл есептердің принципиалды айырмашылығы болады:

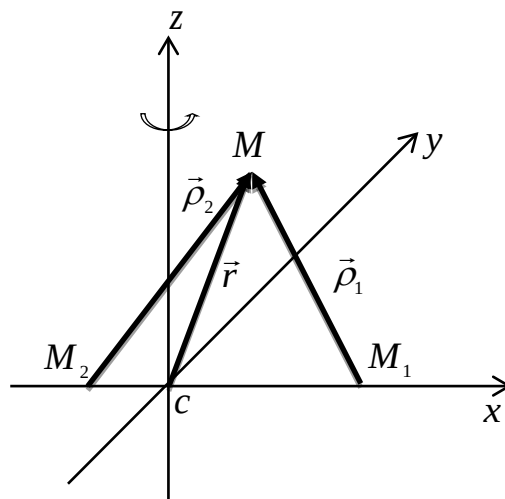
1. екі жылжымайтын центр есебінде үшінші нүктенің қозғалысы инерциалды координат жүйесінде болады және екі ауыр нүктенің күйіне есептің шарты бойынша үшінші нүкте әсер етпейді;

2. үш дененің шектеулі есебінде үшінші нүкте инерциалды емес координат жүйесінде қозғалады және екі ауыр нүктенің күйіне, массасы кіші болғандықтан, үшінші нүкте әсер етпейді.

Инерциалды емес координат жүйесіндегі M нүктенің қозғалыс теңдеуін алу үшін, бірқалыпты айналатын координат жүйесіндегі материалдық нүктеге әсер ететін инерция күштерін (Кориолис күші $(2\vec{n} \times \dot{\vec{r}})$ және ортадан тепкіш күш $(\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r})$) ескеру қажет. Сонда

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - Gm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (4)$$

осында $\vec{n}$ - координат жүйесінің бұрыштық жылдамдығының векторы, $\vec{r}$ - M нүктенің радиус-векторы, $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_{1,2}$ - M нүктенің $M_{1,2}$ ауыр нүктелерге қарағанда орналасуын анықтайтын радиус-векторлары, $\vec{r}_{1,2}$ - $M_{1,2}$ нүктелердің радиус-векторлары (2 сурет).



2 сурет – Үш дененің шеңберлік шектеулі есебі

Осы жағдайда координат жүйесінің z осі $\vec{n}$ вектордың бойымен бағытталған және x осі M_1 мен M_2 нүктелер арқылы өтеді. Сонда координаттық формасында жазылған (4) теңдеуі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2 x + Gm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - Gm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{y}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z} &= -Gm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{z}{\rho_2^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Арнайы бірлік (каноникалық) жүйесін енгіземіз: ұзындық бірлігі ретінде a қашықтықты, масса бірлігі ретінде - $m_1 + m_2$ массалар қосындысын және уақыт бірлігі ретінде – координат жүйесі 1 радианға бұрылған кезіндегі кететін уақытты аламыз. Сонда n бұрыштық жылдамдығының шамасы 1 тең және осы бірлік жүйесінде G гравитациялық тұрақтысы да 1 тең болады. M_1 нүктенің массасын осы бірлік жүйесінде μ арқылы белгілегенде, M_2 нүктенің массасы $1 - \mu$ тең болады. Сонда M_1 нүктесі - $(1 - \mu, 0, 0)$ және M_2 нүктесі - $(-\mu, 0, 0)$ координаттарымен беріледі. Егер $m_1 < m_2$ немесе $\mu < 1/2$ болса, (5) теңдеулер жүйесі келесі түріне айналады

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - x) + \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned}\tag{6}$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ салыстырмалы жылдамдық векторының компоненттеріне (6) теңдеулер жүйесін көбейту және оларды өзара қосу арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1 - \mu)}{\rho_2}\right),\tag{7}$$

осында $v^2 = \left|\dot{\vec{r}}\right|^2$. (7) теңдеуді интегралдау арқылы үш дененің салыстырмалы шектеулі шеңберлік есебінің бірінші интегралын – **Якоби интегралын** аламыз

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right) - c.\tag{8}$$

Якоби интегралы энергия интегралының аналогы болады, себебі теңдеудің оң жағынан есептің жалпыланған потенциалы бар. Бұл интеграл үш дене есебіндегі орнықтылықты зерттеу үшін қолданылады.

3. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебі

Егер үш дененің шектеулі есебінде бастапқы шарттар: $t = t_0$ кезінде $z_0 = \dot{z}_0 = 0$ болса, қозғалыс жазықты болады. Осы жағдай үш дененің

шектеулі жазықты шеңберлік есебі ретінде қарастырылады. Осы есепті зерттеу үшін $Z = x + iy$ комплекстік координатаға ауысу қажет.

(6) теңдеуді i жалған бірліке көбейтіп бірінші теңдеумен қосу арқылы, үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінің теңдеуін аламыз

$$\ddot{Z} = -2i\dot{Z} + Z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - Z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + Z). \quad (9)$$

осында $\rho_{1,2} = |Z - Z_{1,2}|$. Сонда Якоби интегралы келесі түріне айналады

$$|\dot{Z}|^2 = |Z|^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right). \quad (10)$$

Үш дене есебінде материалдық нүктелердің өзара соқтығысуы болуы мүмкін, сол кезде үдеулері кенет жоғарылайды және қозғалыс теңдеуінің оң жақтағы бөліктерінің үздіксіздігі сақталмайды. Осындай әрекетті жою үшін *Т. Тиле* астрономы (9) теңдеуінде айнымалы шамалардың арнайы алмастыру тәсілін ұсынды. Біріншіден, $M_1 M_2$ кесіндінің ортасына координат жүйесінің басы орналасады

$$z = \zeta + \mu - \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Осыдан кейін ζ комплекстік координатасынан w - жаңа комплекстік айнымалы шамасына ауысады

$$\zeta = \cos w. \quad (12)$$

Осы кезде t уақыттың τ жаңа айнымалы шамасына дифференциалдық алмастыруы жасалынады

$$dt = \rho_1 \rho_2 d\tau. \quad (13)$$

Осындай Тиле түрлендіруді бір денеден аппаратты ұшырып екіншісіне қондыру траекториясын есептеулерінде қолданылады.

Бақылау сұрықтары

1. Үш дененің шектеулі есебі дегеніміз не және ол қандай физикалық болжамдарға негізделеді?
2. Үш дененің шектеулі есебі мен толық үш дене есебінің айырмашылығы неде?
3. Үш дененің шектеулі есебін шешудің негізгі мақсаты қандай?
4. Шектеулі шеңберлік үш дене есебінде қандай жеңілдетулер енгізіледі?

5. Шектеулі шеңберлік есеп пен эллипстік есептің айырмашылығы қандай?

Әдебиеттер

1. Алимгазина Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.

2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.

3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.

4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.

5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.